

Orlicz 空间中范数等价的最佳常数

杨雅博, 崔云安

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:众所周知, Orlicz 范数与 Luxemburg 范数是等价的。2011 年, BANG H H, HOANG N V, HUY V N, 研究了由 N 函数生成的 Orlicz 空间中 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数等价的最佳常数, 本文将他们的结果推广到由一般 Orlicz 函数中 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数等价的最佳常数。与此同时得到了 $1 < \inf \left\{ k > 0: \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx)) = 1 \right\}$ 及 $\sup \left\{ k > 0: \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx)) = 1 \right\} < \infty$ 的等价条件。

关键词: Orlicz 空间; Orlicz 范数; Luxemburg 范数; Δ_2 条件

DOI: 10.15938/j.jhust.2023.04.016

中图分类号: O177.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)04-0133-05

The Best Constant of Norm Equivalence in Orlicz Space

YANG Yabo, CUI Yunan

(School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: The Orlicz norm is equivalent to the Luxemburg norm. In 2011, BANG H H, HOANG N V, HUY V N have obtained the best equivalent constant between the Orlicz norm and the Luxemburg norm in Orlicz space which generated by N-functions. The best equivalent constant between the Orlicz norm and the Luxemburg norm in Orlicz space which generated by general Orlicz functions is given. Moreover the sufficient and necessity condition that $1 < \inf \left\{ k > 0: \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx)) = 1 \right\}$ and $\sup \left\{ k > 0: \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx)) = 1 \right\} < \infty$ are presented.

Keywords: Orlicz sequence spaces; Orlicz norm; Luxemburg norm; Δ_2 -condition

0 引言

Orlicz 空间是 Banach 空间的推广, 作为一类具体的 Banach 空间, 为一般的 Banach 空间研究提供了具体的实例。1932 年, 数学家 W. Orlicz 引入了 Orlicz 空间给出了 Orlicz 范数的定义^[1]。1963 年, W. A. Luxemburg 给出了 Luxemburg 范数的定义^[2], 其极大地丰富了 Orlicz 空间理论。1985 年, 吴从炘、王廷辅给

出了赋 Orlicz 范数(或赋 Luxemburg 范数)的 Orlicz 空间中范数的关系^[3]。更多关于 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数的研究见文[4-5]。众所周知, Orlicz 范数与 Luxemburg 范数是等价的。本文给出由一般 Orlicz 函数生成的 Orlicz 空间中使得 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数等价的最佳常数, 进一步补充文[7]中得到的结果。同时得到了 $1 < \inf \left\{ k > 0: \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx)) = 1 \right\}$ 及 $\sup \left\{ k > 0: \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx)) = 1 \right\} < \infty$ 的等价条件。

收稿日期: 2022-04-01

基金项目: 国家自然科学基金(11871181)。

作者简介: 杨雅博(1997—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 崔云安(1961—), 男, 博士, 教授, 博士研究生导师, E-mail: cuiya@hrbust.edu.cn。

1 预备知识

本文设 X 是 Banach 空间, $S(X)$ 和 $B(X)$ 分别表示 X 的单位球面和闭单位球, N 和 R 分别为正整数集和实数集。

定义 1^[6] 称 Φ 为 Orlicz 函数是指: Φ 为偶的、连续的、非负的凸函数且 $\Phi(0) = 0$ 。

定义 2^[6] 设 $(G, \sum, \mu)$ 是无原子测度空间, L_0 是可测函数的全体。Orlicz 函数空间定义为

$$L_\Phi = \left\{ x(t) \in L_0 : \exists \lambda > 0, I_\Phi(\lambda x) = \int_G \Phi(\lambda x(t)) dt < \infty \right\}$$

在 Orlicz 函数空间中赋予 Luxemburg 范数

$$\|x\|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

及 Orlicz 范数

$$\|x\|^\circ = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kx)) = \sup \left\{ \int_G x(t)y(t) : I_\Psi(y) \leq 1 \right\},$$

其中 Ψ 表示 Φ 的余函数。

Orlicz 函数空间 L_Φ 赋 Luxemburg 范数及 Orlicz 范数, 分别记做 $L_\Phi = (L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$, $L_\Phi^\circ = (L_\Phi, \|\cdot\|^\circ)$ 。

定义 3^[6] 称 Orlicz 函数 Φ 满足 Δ_2 条件(记为 $\Phi \in \Delta_2$) 是指: 存在 $K \geq 2$ 及 $u_0 > 0$, 当 $|u| \geq u_0$ 时, 有

$$\Phi(2u) \leq K\Phi(u).$$

定义 4^[6] 称 Orlicz 函数 Φ 满足 ∇_2 条件(记为 $\Phi \in \nabla_2$) 是指: 存在 $\delta > 0$ 及 $u_0 > 0$, 当 $|u| \geq u_0$ 时, 有

$$\Phi\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{1-\delta}{2}\Phi(u).$$

定义 5^[6] 对于任意的 $x \in L_\Phi$, 我们定义

$$\theta(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) < \infty \right\}.$$

在 Orlicz 空间中, Orlicz 范数与 Luxemburg 范数是等价的, 即存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \|x\|_\Phi \leq \|x\|^\circ \leq C_2 \|x\|_\Phi,$$

通常 $C_1 = 1, C_2 = 2$ 。

在文[7]中讨论了由 N 函数生成的 Orlicz 空间中 Orlicz 范数与 Luxemburg 范数等价关系之间的最佳常数, 即 C_1, C_2 的表达式。

定义 6^[6] 定义函数 $k^* : L_\Phi \rightarrow [0, \infty)$, $k^{**} : L_\Phi \rightarrow [0, \infty)$ 为

$$k^* = \inf \{k > 0 : I_\Phi(p(k|x|)) \geq 1\},$$

$$k^{**} = \sup \{k > 0 : I_\Phi(p(k|x|)) \leq 1\}.$$

其中 $p(x)$ 为函数 $\Phi(x)$ 导数的非减连续函数。显然对任意的 $x \in L_\Phi$, 有 $k^*(x) \leq k^{**}(x)$ 记

$$k(x) = \{0 < k < \infty : k^*(x) \leq k \leq k^{**}(x)\}$$

我们有 $k(x) = \emptyset$ 当且仅当 $k^*(x) = k^{**}(x) = \infty$, 如果 $k^{**}(x) < \infty$, 则称 $\|x\|^\circ$ 为范数可达的。

2 主要结果及证明

本文所用引理如下:

引理 1^[8] 对任意的 $x \in S(L_\Phi)$ 若 $\theta(x) < 1$, 则 $I_\Phi(x) = 1$ 。

引理 2^[6] 若 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = A < +\infty$, 且

$$k(x) = \emptyset, \text{ 则 } \|x\|^\circ = A \int_G |x(t)| dt.$$

证明: 若 $k(x) = \emptyset$, 则

$$\|x\|^\circ = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\int_G \Phi(kx(t)) dt}{k} =$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\text{supp } x} \frac{\Phi(kx(t))}{k |x(t)|} |x(t)| dx =$$

$$A \int_G |x(t)| dt.$$

引理 3 若 $\Phi \in \nabla_2$, 则 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = +\infty$ 。

证明: 设 $\Phi \in \nabla_2$ 即存在 $0 < \delta < 1$ 及 $u_0 > 0$, 使得当 $u \geq u_0$ 时, 有 $\Phi\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{1-\delta}{2}\Phi(u)$ 。

若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = A < +\infty$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $u_1 > 2u_0$, 当 $u \geq u_1$ 时

$$A - \varepsilon < \frac{\Phi(u)}{u} \leq A + \varepsilon;$$

$$(1 - \varepsilon)Au < \Phi(u) \leq (1 + \varepsilon)Au,$$

令 $\varepsilon < \frac{A\delta}{2 - \delta}$, 则

$$(A - \varepsilon) \frac{u}{2} < \Phi\left(\frac{u}{2}\right) \leq (A + \varepsilon) \frac{u}{2},$$

即

$$\Phi\left(\frac{u}{2}\right) > (A - \varepsilon) \frac{u}{2} > \frac{A - \varepsilon}{2(A + \varepsilon)} \Phi(u) >$$

$$\frac{1 - \delta}{2} \Phi(u).$$

故 $\Phi \notin \nabla_2$, 产生矛盾。

定理 1 设 Φ 是 Orlicz 函数, 若 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} =$

$A < +\infty$, 则存在 $\{x_n\} \subset S(L_\Phi)$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^o = 1$ 。

证明: 当 $\mu(\text{supp}(x)) < \frac{1}{\Psi(A)}$ 时, 对于 $\forall k > 0$, 有

$$I_\Psi(p(k|x(t)|)) = \int_G \Psi(p(k|x(t)|)) dt \leq \int_{\text{supp}(x)} \Psi(A) dt = \Psi(A)\mu(\text{supp}(x)) < 1,$$

则 $k_x^* = +\infty$, 即 $k(x) = \emptyset$ 。根据引理 2 我们得到

$$\|x\|^o = A \int_G |x(t)| dt。$$

由于 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = A < \infty$, 则存在 $\varepsilon = \frac{A}{2^n}$ 及序列 $\{u_n\} \uparrow +\infty$, 使得当 $u \geq u_n$ 时有

$$A - \frac{A}{2^n} \leq \frac{\Phi(u)}{u} \leq A + \frac{A}{2^n},$$

即

$$(1 - \frac{1}{2^n})Au \leq \Phi(u) \leq (1 + \frac{1}{2^n})Au。$$

取 $G_n \subset G$, 满足 $\mu(G_n) < \frac{1}{\Psi(A)}$ 且

$$\Phi(u_n)\mu(G_n) = 1。$$

定义 $x_n = u_n \chi_{G_n}$, 则 $\|x_n\|_\Phi = 1$ 且

$$\|x_n\|^o = A \int_G |x_n(t)| dt = Au_n \mu(G_n)。$$

由上文我们得到

$$(1 - \frac{1}{2^n})Au_n \leq \Phi(u_n) \leq (1 + \frac{1}{2^n})Au_n;$$

$$(1 - \frac{1}{2^n})Au_n \mu(G_n) \leq \Phi(u_n) \mu(G_n) \leq$$

$$(1 + \frac{1}{2^n})Au_n \mu(G_n),$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} A\Phi(u_n)\mu(G_n) = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|^o = 1$, 得证。

定理 2 若 $x \in L_\Phi, \theta(x) = 1$, 则存在

$\{x_n\} \subset L_\Phi$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\Phi = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^0 = 1$ 。

证明: 令 $x_n = \alpha \chi_{G_n}$, 其中 $G_n(t) = \{t \in G: |x(t)| \geq n\}$ 。根据 $\theta(x)$ 的定义可知

$$I_\Phi(\frac{x}{\theta(x) + \varepsilon}) < \infty,$$

$$I_\Phi(\frac{x}{\theta(x) - \varepsilon}) = \infty。$$

根据上式可知存在 $\varepsilon_1 > 0$ 及 $n_0 \in N$, 当 $n \geq n_0$

时有 $I_\Phi(\frac{x_n}{\theta(x) + \varepsilon}) < \varepsilon_1$, 故 $\|x_n\|_\Phi \leq \theta(x) + \varepsilon$ 。由

上式 $I_\Phi(\frac{x_n}{\theta(x) - \varepsilon}) = \infty$, 故 $\|x_n\|_\Phi \geq \theta(x) - \varepsilon$ 。综

上 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_\Phi = \theta(x) = 1$ 。

根据 Orlicz 范数的定义可知, 取 $k = \frac{1}{\theta(x) + \varepsilon}$ 则有

$$\|x_n\|^o = \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kx)) \leq$$

$$(\theta(x) + \varepsilon)(1 + I_\Phi(\frac{x_n}{\theta(x) + \varepsilon})) \leq \theta(x) + \varepsilon,$$

故 $\theta(x) - \varepsilon \leq \|x_n\|_\Phi \leq \|x_n\|^o \leq \theta(x) + \varepsilon$ 。综上 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^o = \theta(x) = 1$, 得证。

定理 3 设 $\{x_n\} \subset L_\Phi$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_\Phi(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|^o = a < 1, \text{ 则 } k_n \rightarrow +\infty。$$

证明: 由于 $a < 1$, 存在 $k_n > 1$ 满足

$$\|x_n\|^o = \frac{1}{k_n}(1 + I_\Phi(k_n x_n)) = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n} I_\Phi(k_n x_n) \geq$$

$$\frac{1}{k_n} + I_\Phi(x_n)。$$

即

$$\|x_n\|^o - I_\Phi(x_n) \geq \frac{1}{k_n} \geq 0。$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|x_n\|^o - I_\Phi(x_n)) = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_n} = 0$, $k_n \rightarrow +\infty$, 得证。

推论 1 $\sup\{k > 0: \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kx)) = 1\} <$

∞ 的充分必要条件是 $\Phi \in \nabla_2$ 。

证明:

充分性:

若 $\Phi \in \nabla_2$, 根据引理 3 可知 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = +\infty$ 。

根据文[6] 中定理 1.20 可知 $k \in K(x)$, 故 $k < \infty$, 得证。

必要性:

若 $\Phi \notin \nabla_2$, 取 $\delta = \frac{1}{n}$, 则存在 $\{l_n\} \uparrow +\infty$ 及

$\{u_n\} \uparrow +\infty$ 满足 $l_1 > 2^2$ 及 $u_n \geq \Phi^{-1}(\frac{1}{2\mu(G)})$, 使得

对于任意的 $n \in N$, 都有

$$\Phi(l_n u_n) < (1 + \frac{1}{n})l_n \Phi(u_n)。$$

且存在 $a < 1$, 取 $G_n \in \sum$ 满足 $\Phi(u_n)\mu(G_n) = a$ 。

定义 $x_n = u_n \chi_{G_n}$, 则

$$a = I_\Phi(x_n) \leq \|x_n\|^o = \frac{1}{l_n}(1 + I_\Phi(l_n x_n)) =$$

$$\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_n} I_\Phi(l_n x_n) <$$

$$\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) l_n \Phi(u_n) \mu(G_n) =$$

$$\frac{1}{l_n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) a \rightarrow a$$

易知当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|x_n\|^0 < 1$, 则存在 $k_n > 1$ 使得

$$\frac{1}{l_n} + a \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \|x_n\|^0 =$$

$$\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n} \Phi(k_n u_n) \mu(G_n) >$$

$$\frac{1}{k_n} + \Phi(u_n) \mu(G_n) = \frac{1}{k_n} + a$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_n} = 0, k_n \rightarrow +\infty$, 产生矛盾。

下面给出本文的主要结论

定理 4 $C_1 > 1$ 的充分必要条件为 $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ 且 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = +\infty$ 。

证明:

必要性: 根据文[7] 可知 $C_1 \geq 1$ 。

1) 若 $\Phi \notin \Delta_2$, 则 $\Phi \notin \Delta_l$ 。取 $l = 1 + \frac{1}{n}$, 则存在 $\{k_n\} \uparrow \infty$ 及 $u_{n+1} > u_n (n = 1, 2, \dots)$ 满足 $\Phi((1 + \frac{1}{n})u_n) \geq k_n \Phi(u_n)$ 。令 $x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \chi_{G_n}$, 其中 G_n 为互不相交的可测子集且满足

$$\Phi(u_n) \mu(G_n) = \frac{1}{2^n}。$$

则有

$$I_{\Phi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n) \mu(G_n) = 1,$$

又根据 $\Phi((1 + \frac{1}{n})u_n) \geq k_n \Phi(u_n)$, 可知对于任意的 $0 < \lambda < 1$, 都存在 n_0 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\frac{1}{\lambda} > 1 + \frac{1}{n}$ 且

$$I_{\Phi}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{u_n}{\lambda}\right) \mu(G_n) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \Phi\left((1 + \frac{1}{n})u_n\right) \mu(G_n) \geq$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} k_n \Phi(u_n) \mu(G_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} k_n \frac{1}{2^n} = \infty,$$

综上可知 $\|x\|_{\Phi} = 1$ 。令 $x_k = \sum_{n=k}^{\infty} u_n \chi_{G_n}$ 则 $\|x_k\|_{\Phi} = 1$ 。根据 $\theta(x)$ 的定义可知 $\|x_k\|_{\Phi} = \theta(x) = 1$ 。由定理 2, 得到 $C_1 = 1$;

2) 若 $\Phi \notin \nabla_2$, 由推论 1 得到 $C_1 = 1$;

3) 若 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = A < \infty$, 则由定理 1 可知 $C_1 = 1$ 。

充分性:

对于任意的 $x \in S(L_{\Phi}^0)$, 由于 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = +\infty$, 可知存在 $k > 1$ 满足:

$$1 = \|x\|^0 = \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi}(kx)) \geq \frac{1}{k} + I_{\Phi}(x)。$$

利用 $\Phi \in \nabla_2$ 知存在常数 $M > 0$ 满足: $k \leq M$ 。从而 $I_{\Phi}(x) \leq 1 - \frac{1}{M}$ 。再利用 $\Phi \in \Delta_2$ 得到存在 $\delta > 0$ 使得 $\|x\|_{\Phi} \leq 1 - \delta$, 故 $C_1 \geq \frac{1}{1 - \delta} > 1$ 。

定理 5 设 $\{x_n\} \subset S(L_{\Phi})$, 满足 $\|x_n\|^0 \rightarrow 1$, 若 $I_{\Phi}(x_n) \rightarrow 0$, 则 $k_n \rightarrow 1$ 。

证明: 由于 $\|x_n\|^0 \rightarrow 1, I_{\Phi}(x_n) \rightarrow 0$, 则 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ 。

若不然 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = A < \infty$, 可令 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, 则存在 u_0 , 当 $u \geq u_0$ 时

$$A - \frac{A}{2} < \frac{\Phi(u)}{u} < A + \frac{A}{2};$$

$$\frac{A}{2}u < \Phi(u) < \frac{3}{2}Au,$$

则 $\Phi(2u) \leq 3Au \leq 6\Phi(u)$, $\Phi \in \Delta_2$ 。此时 $\|x_n\|_{\Phi} = 1$ 且 $I_{\Phi}(x_n) = 1$, 产生矛盾。

因此存在 $k_n > 0$, 满足

$$\|x_n\|^0 = \frac{1}{k_n} (1 + I_{\Phi}(k_n x_n))。$$

下面证明 $\theta(x_n) \rightarrow 1$ 。由 $I_{\Phi}(x_n) \rightarrow 0$ 及 $\theta(x)$ 的定义, 可知 $\theta(x_n) \leq 1$ 。若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \theta(x_n) < 1$, 则存在 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ 满足 $\theta(x_{n_i}) < 1$ 。根据引理 1, 得到 $I_{\Phi}(x_{n_i}) = 1$, 产生矛盾, 故 $\theta(x_n) \rightarrow 1$ 。

由于 $I_{\Phi}(k_n x_n) < \infty$, 故 $\frac{1}{k_n} \geq \theta(x_n)$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} k_n \leq 1$ 。

又由 $\frac{1}{k_n} \leq 1$, 得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n \geq 1$ 。故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 1$, 得证。

推论 2 $1 < \inf\left\{k > 0: \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi}(kx)) = 1\right\}$ 的充分必要条件是 $\Phi \in \Delta_2$ 。

证明:

充分性:

1) 若 $K(x) \neq \emptyset$, 根据 $\Phi \in \Delta_2$ 则存在 $k \in K(x)$ 及 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in S(L_{\Phi}^0)$, 都有 $I_{\Phi}(x) \geq \delta$ 且

$$k = 1 + I_{\Phi}(kx) \geq 1 + I_{\Phi}(x) \geq 1 + \delta。$$

2) 若 $K(x) = \varnothing$, 则 $k = \infty$ 。

故 $1 < \inf\{k > 0 : \frac{1}{k}(1 + I_{\Phi}(kx)) = 1\}$, 得证。

必要性: 若 $\Phi \notin \Delta_2$, 则 $\Phi \notin \Delta_{1+\frac{1}{n}}$ 。令 $n = 1$, 则存在 $u_1 > 0$ 及足够大的 K_1 使得

$$\Phi((1 + 1)u_1) > K_1\Phi(u_1)。$$

令 $n = 2$, 则存在 u_2 及足够大的 $K_2 > K_1$ 使得

$$\Phi((1 + \frac{1}{2})u_2) > K_2\Phi(u_2)。$$

由数学归纳法, 可知存在 u_n 及足够大的 $K_n > K_{n-1}$ 使得

$$\Phi((1 + \frac{1}{n})u_n) > K_n\Phi(u_n)。$$

取为一系列互不相交的可测子集 $\{G_n\}$, 满足

$$\mu(G_n) = \frac{1}{2^n\Phi(u_n)}。$$

定义 $x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\chi_{G_n}$, 则

$$\begin{aligned} I_{\Phi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} \Phi(u_n) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n)\mu(G_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n) \frac{1}{2^n\Phi(u_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = 1。 \end{aligned}$$

故 $\|x\|_{\Phi} = 1$ 。此外, 对于任意的 $0 < \lambda < 1$, 都存在 $n_0 \in N$ 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\frac{1}{\lambda} > 1 + \frac{1}{n}$ 且

$$\begin{aligned} I_{\Phi}(\frac{x}{\lambda}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\frac{u_n}{\lambda})\mu(G_n) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \Phi(\frac{u_n}{\lambda})\mu(G_n) \geq \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \Phi((1 + \frac{1}{\lambda})u_n)\mu(G_n) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} K_n\Phi(u_n)\mu(G_n) = +\infty。 \end{aligned}$$

定义 $x_k = \sum_{n=k}^{\infty} u_n\chi_{G_n}$, 则 $\|x_k\|_{\Phi} = 1, I_{\Phi}(x_k) \rightarrow 0$ 且 $\|x_k\|^{\circ} \rightarrow 1$ 。根据定理 5 可知 $k_n \rightarrow 1$, 产生矛盾, 得证。

参 考 文 献:

[1] ORLICZ W. UBER Eine Gewisse Klasse Von Rumen Vom Typus B[J]. Del' Acad Polonica Series, 1932, A: 207.
[2] LUXEMBURG W A J. Banach Function Space [D]. Netherlands: Delft University of Technology, 1955: 1.
[3] 吴从炘, 王廷辅. Orlicz 空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.
[4] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 31.

[5] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛, 等. Orlicz 空间几何理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986: 31.
[6] CHEN SHUTAO. Geometry of Orlicz Spaces[J]. Dissertationes Mathematicae, 1996: 356.
[7] BANG H H, HOANG N V, HUY V N. Best Constants for the Inequalities Between Equivalent Norms in Orlicz Spaces[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, 2011 (59): 165.
[8] KACZMAREK R. Some Monotonicity Properties in F-normed Musielak-Orlicz Spaces[J]. Aequationes Mathematicae, 2020, 94(5/6): 865.
[9] MUSIELAK J. Orlicz Spaces and Modular Spaces[M]. Lecture Notes in Mathematics, 1983, 1034(4): 1.
[10] RAO M M, REN Z D. Theory of Orlicz Spaces [M]. M. Dekker, 1991: 55.
[11] CUI YUNAN, DUAN LIFEN, HUDZIK H, et al. Basic Theory of Amemiya Norm in Orlicz Spaces Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with These Norms[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5/6): 1796.
[12] HUDZIK H, MALIGRANDA L. Amemiya Norm Equals Orlicz Norm in General[J]. Indagationes Mathematicae, 2000, 11(4): 573.
[13] 贺鑫. 赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何常数及其应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015: 22.
[14] HUDZIK H. A Criterion of Uniform Convexity of Musielak-Orlicz Spaces with Luxemburg's Norm [D]. Commentationes Mathematicae, 1983, 23(1).
[15] HUDZIK H, KAMINSKA A. Equivalence of the Orlicz and Luxemburg Norms in Generalized Orlicz Spaces $L_{\Phi} M(T)$ [J]. Functions et Approximation Commentarii Mathematici, 1980(9): 29.
[16] 左明霞, 邹金爽. 赋 Orlicz 范数的 Orlicz 函数空间的紧强凸性质[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2015, 20(5): 123.
ZUO MINGXIA, ZOU JINSHUANG. Compactly Strongly Convex Property of Orlicz Spaces Equipped with Orlicz Norm[J]. Harbin University of Science and Technology, 2015, 20(5): 123.
[17] 李小彦. 赋 P-Amemiya 范数 orlicz 空间的若干性质 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2010: 20.
[18] 彭丽娜. 赋 p-Amemiya 范数下 Orlicz 序列空间的接近一致凸性[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2015: 15.
[19] LIU YUXIA, SHI ZHONGRUI, ZHANG PING. Rotundity of Orlicz-Bochner Space with Luxemburg Norm [J]. Journal of Shanghai University (English Edition), 2003, 7(4): 322.

(编辑: 温泽宇)